1. Oldjuk meg az egész számok halmazán a $2x^2y^2 + y^2 = 6x^2 + 12$ egyenletet!

<u>1. Megoldás:</u>

$$y^2 = \frac{6x^2+12}{2x^2+1} = \frac{3(2x^2+1)+9}{2x^2+1} = 3 + \frac{9}{2x^2+1}$$

$2x^2+1$	1	3	9
x	0	∓ 1	∓ 2
y	*nem egész*	*nem egész*	∓ 2

Négy megoldás van.

<u>2. Megoldás:</u>

Mivel $y^2 \neq 3$

$$x^2 = \frac{y^2-12}{2(3-y^2)}$$

A jobb oldal is nemnegatív kell, hogy legyen, ezért

$$3 < y^2 \leq 12$$

ahonnan $y^2 = 4$ *vagy* $y^2 = 9$.

Csak az első esetben lesz x is egész, ekkor megoldásként négy számpár adódik.

2. Milyen kapcsolat van a p és q paraméterek között, ha az $x^4 + px^2 + q = 0$ egyenlet gyökeire igaz a következő összefüggés:

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{x_3}{x_2} = \frac{x_4}{x_3}$$

<u>Megoldás:</u>

Az összefüggés alapján: $x_2 = c \cdot x_1$; $x_3 = c^2 \cdot x_1$; $x_4 = c^3 \cdot x_1$.

Mivel az egyenletben x csak páros kitevőn szerepel, ha x_1 *gyöke az egyenletnek, akkor* $-x_1$ *is gyöke az egyenletnek, tehát* $c = -1$

Ekkor viszont az egyenletnek x_1^2 *többszörös gyöke, tehát a diszkriminánsa nulla, azaz* $p^2 = 4q$.

Mivel ekkor $x_1^2 = \frac{-p}{2}$, *ezért* $p < 0$ *kell, hogy legyen.*

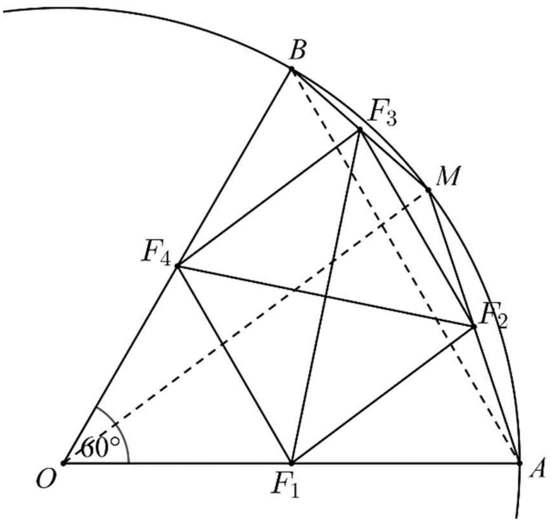
Ebben az esetben az eredeti egyenlet gyökei:

$$x_1 = \sqrt{\frac{-p}{2}}\ ;\ x_2 = -\sqrt{\frac{-p}{2}}\ ;\ x_3 = \sqrt{\frac{-p}{2}}\ ; x_4 = -\sqrt{\frac{-p}{2}}$$

Tehát a feltétel teljesül.

3. Az O középpontú körvonal két pontja A és B, továbbá $AOB\sphericalangle = 60°$. A rövidebb AB ív tetszőleges belső pontja M. Bizonyítsuk be, hogy az $OBMA$ négyszög középvonalai egymásra merőlegesek.

<u>Megoldás:</u>



F_1F_2 az OAM, F_3F_4 az OMB, F_2F_3 az AMB, F_1F_4 az OAB háromszögek középvonalai, tehát:

$F_1F_2 \parallel F_3F_4 \parallel OM$ *és* $F_2F_3 \parallel F_1F_4 \parallel AB$

valamint

$F_1F_2 = F_3F_4 = \frac{1}{2} \cdot OM$ *és* $F_2F_3 = F_1F_4 = \frac{1}{2} \cdot AB$

OAB háromszög szabályos, tehát AB=OA=r és OM=r.

Így az $F_1F_2F_3F_4$ négyszög rombusz, és a rombusz átlói merőlegesek egymásra.

4. Határozzuk meg azokat a nem palindrom négyjegyű számokat, amelyekből ha kivonjuk az első kettő és az utolsó kettő számjegyükből álló számok szorzatát, ugyanazt az eredményt kapjuk, minta ezt azzal a négyjegyű számmal tennénk meg, amelyet az eredeti négyjegyű szám számjegyeinek tükrözésével kapunk.

Megoldás:

$$\overline{abcd} - \overline{ab} \cdot \overline{cd} = \overline{dcba} - \overline{dc} \cdot \overline{ba}$$
$$1000a + 100b + 10c + d - (10a + b) \cdot (10c + d) = 1000d + 100c + 10b + a - (10d + c) \cdot (10b + a)$$
$$111(a - d) + 10(b - c) = 11(ac - bd)$$

Mivel a 111 11-gyel osztva 1 maradékot ad, 10 pedig -1 maradékot, a bal oldal csak úgy lesz osztható 11-gyel, ha $a - d$ és $b - c$ ugyanazt a maradékot adja 11-gyel osztva.

Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $a > d$.

Ekkor két lehetőség van. $a - d$ és $b - c$ is m maradékot ad 11-gyel osztva, vagy $a - d$ m maradékot, $b - c$ pedig $m - 11$ maradékot ad 11-gyel osztva.

Az első esetben: $a - d = m$ és $b - c = m$, valamint $0 \leq a - d \leq 8$

$$111m + 10m = 11\big(a(b - m) - b(a - m)\big)$$
$$11m = m(a - b)$$
$$11 = a - b$$

Ami lehetetlen

Az második esetben: $a - d = m$ és $b - c = m - 11$, valamint $0 \leq a - d \leq 8$

$$111m + 10(m - 11) = 11\big(a(b - m + 11) - b(a - m)\big)$$
$$11m - 10 = (11 - m)a + mb$$
$$\textit{Mivel } a \geq m + 1$$
$$11m - 10 \geq (11 - m)(m + 1)$$
$$\textit{Ebből } m \geq 5 \textit{ következik}$$

1) Ha $a - d = 5$, akkor $b - c = -6$, az egyenlet az alábbi alakot ölti:

$$45 = 6a + 5b$$

A számjegyek halmazán $a = 5$ $b = 3$ a megoldás, de ez ellentmond az $a \geq m + 1$ feltételnek.

2) Ha $a - d = 6$, akkor $b - c = -5$, az egyenlet az alábbi alakot ölti:

$$56 = 5a + 6b$$

A számjegyek halmazán $a = 4$ $b = 6$ a megoldás, de ez ellentmond az $a \geq m + 1$ feltételnek.

3) Ha $a - d = 7$, akkor $b - c = -4$, az egyenlet az alábbi alakot ölti:

$$67 = 4a + 7b$$

A megoldások: $a = 8$; $b = 5$; $c = 9$; $d = 1$

4) Ha $a - d = 8$, akkor $b - c = -3$, az egyenlet az alábbi alakot ölti:

$$78 = 3a + 8b$$

A számjegyek halmazán $a = 3$ $b = 3$ a megoldás, de ez ellentmond az $a \geq m + 1$ feltételnek.

Tehát a keresett négyjegyű szám a 8591 (1958).

5. Definiáljuk az $\{a_n\}$ sorozatot az alábbi módon:

$a_1 = \dfrac{1}{2}$

$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = n^2 \cdot a_n$ ha $1 < n$

Határozza meg a_{2014} pontos értékét!

Megoldás:

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}) + a_n = (n - 1)^2 \cdot a_{n-1} + a_n$$
$$(n - 1)^2 \cdot a_{n-1} + a_n = n^2 \cdot a_n$$
$$(n - 1)^2 \cdot a_{n-1} = (n + 1) \cdot (n - 1) \cdot a_n$$
$$a_n = \frac{n - 1}{n + 1} \cdot a_{n-1}$$

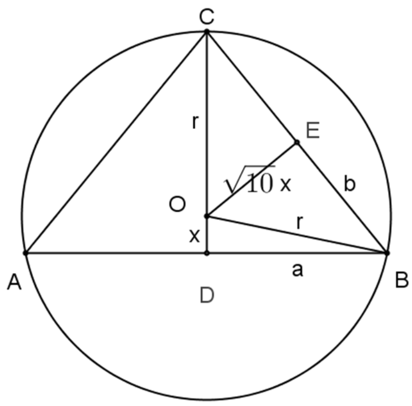
$$a_{2014} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{2011}{2013} \cdot \frac{2012}{2014} \cdot \frac{2013}{2015} = \frac{1}{2014 \cdot 2015}$$

(teleszkopikus szorzat)

6. Egy egyenlő szárú háromszög köré írt kör középpontjának az alaptól mért távolsága úgy aránylik a szártól mért távolsághoz, mint $1:\sqrt{10}$. Határozza meg az alap és a szár arányát!

Megoldás

a) eset



Használjuk az ábra jelöléseit és írjuk fel a Pitagorasz tételeket a derékszögű háromszögekben!

$(1)\quad b^2 + 10x^2 = r^2$

$(2)\quad a^2 + x^2 = r^2$

$\underline{(3)\quad a^2 + (r+x)^2 = 4b^2}$

$4\cdot(1)-(2)\quad 4b^2 - a^2 = 3r^2 - 39x^2$

Ebből:

$(r+x)^2 = 3r^2 - 39x^2$

$2r^2 - 2xr - 40x^2 = 0$

$$\left(\frac{r}{x}\right)^2 - \left(\frac{r}{x}\right) - 20 = 0$$

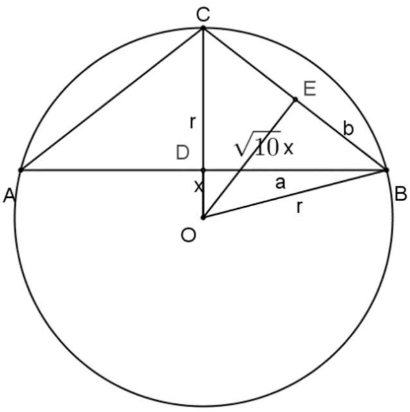
$\frac{r}{x} = -4 \quad ; \quad \frac{r}{x} = 5$

Az első megoldás nem felel meg a feladat feltételeinek.

$a = 2\sqrt{6}x \;;\; b = \sqrt{15}x$

$$\frac{a}{b} = \frac{2\sqrt{10}}{5}$$

b) eset



$(1)\quad b^2 + 10x^2 = r^2$

$(2)\quad a^2 + x^2 = r^2$

$\underline{(3)\quad a^2 + (r-x)^2 = 4b^2}$

$4\cdot(1)-(2)\quad 4b^2 - a^2 = 3r^2 - 39x^2$

Ebből:

$(r-x)^2 = 3r^2 - 39x^2$

$2r^2 + 2xr - 40x^2 = 0$

$$\left(\frac{r}{x}\right)^2 + \left(\frac{r}{x}\right) - 20 = 0$$

$\frac{r}{x} = 4 \quad ; \quad \frac{r}{x} = -5$

A második megoldás nem felel meg a feladat feltételeinek.

$a = \sqrt{15}x \;;\; b = \sqrt{6}x$

$$\frac{a}{b} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

7. Oldjuk meg a következő egyenletet az egész számpárok halmazán!

$$x + y^2 = y + x^2 + y^3$$

Megoldás:

Átrendezve:

$$y^2 - x^2 - (y - x) = y^3$$
$$(y - x)(y + x - 1) = y^3$$

Ha $y = 0$, *akkor* $x = 0$, *vagy* $x = 1$

Ha $y \neq 0$, *akkor vizsgáljuk a bal oldali szorzat tényezőinek legnagyobb közös osztóját:*

$$(y - x\,; y + x - 1) = (y - x\,; y + x - 1 + y - x) = (y - x\,; 2y - 1)$$

Így minden olyan p *prím esetén, amelyre* $p|(y - x)$ *és* $p|(y + x - 1)$, *igaz, hogy* $p|(2y - 1)$.

De ekkor $p|y^3$, *így* $p|y$,

amiből: $p|\big(2y - (2y - 1)\big)$, *azaz* $p|1$, *ami lehetetlen.*

Így $(y - x\,; y + x - 1) = 1$, *ami azt jelenti, hogy mindkét tényező teljes köb.*

Legyen $y - x = a^3$ *és* $y + x - 1 = b^3$, *ekkor* $y^3 = a^3 \cdot b^3$, *tehát* $y = a \cdot b$

A két tényezőt összeadva:

$$y - x + y + x - 1 = 2y - 1 = a^3 + b^3$$

Tehát

$$2ab - 1 = a^3 + b^3$$

1. $a > 0$ *és* $b > 0$
$$-1 = a^3 + b^3 - 2ab > a^2 + b^2 - 2ab = (a - b)^2$$
Ami lehetetlen
2. $a < 0$ *és* $b < 0$
$$0 < 2ab - 1 = a^3 + b^3 < 0$$
szintén lehetetlen.
3. *Ha* a *és* b *különböző előjelűek, akkor a szimmetria miatt feltehető, hogy* $a > 0 > b$
Mivel ekkor
$$2ab - 1 < 0$$
ezért
$$a^3 + b^3 < 0$$
$$a < -b$$
Legyen $-b = c$, *ekkor* $(a < c)$ *és*
$$-2ac - 1 = a^3 - c^3$$
$$2ac + 1 = (a - c)(a^2 + ac + c^2)$$
Mivel $a < c$ *és* $a^2 \geq 1$, *így*
$$2ac + 1 = (a - c)(c^2 + ac + a^2) > (ac + ac + 1) = 2ac + 1$$

Ez lehetetlen, tehát a két megoldás: $(1; 0)$ *és* $(0; 0)$.

8. Oldja meg a következő egyenletet a valós számok halmazán:

$$x+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{35}{12}$$

Megoldás:

Legyeny $=\sqrt{x^2-1}$. *Ekkor* $x=\sqrt{y^2+1}$. *Megjegyzés:* $x<-1$, *vagy* $x>1$, *de ebből csak* $x>1$ *lehet*

$$\sqrt{y^2+1}+\frac{\sqrt{y^2+1}}{y}=\frac{35}{12}$$

$$(y+1)\sqrt{y^2+1}=\frac{35}{12}y$$

Megjegyzés: $y<-1$, *vagy* $y\geq 0$, *de ebből csak* $y\geq 0$ *lehet*

$$\left((y^2+1)+2y\right)(y^2+1)=\frac{1225}{144}y^2$$

$$(y^2+1)^2+2y(y^2+1)-\frac{1225}{144}y^2=0$$

Ebből

$$y^2+1=-\frac{49}{12}y$$

vagy

$$y^2+1=\frac{25}{6}y$$

Ez első egyenlet mindkét gyöke negatív, a második egyenlet gyökei:

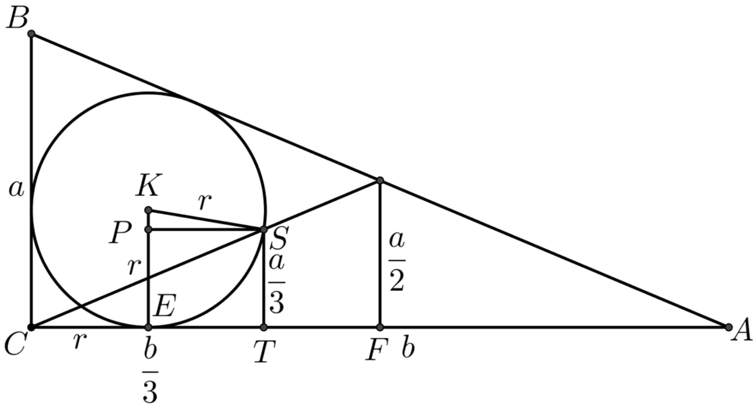
$$\frac{3}{4}\ ;\frac{4}{3}$$

Ebből: $x_1=\frac{5}{4}\ ;\ x_2=\frac{5}{3}$

$$x_1=\frac{5}{4}\ ;\ x_2=\frac{5}{3}$$

9. Egy $\sqrt{3}$ egység átfogójú derékszögű háromszög súlypontja a háromszög beírt körén van. Mekkora a háromszög kerülete?

Megoldás:



Legyenek a befogók a és b, ahol ($a < b$). Állítsunk merőlegest a beírt kör középpontjából és a súlypontból a b oldalra, valamint a súlypontból a KE szakaszra!

A párhuzamos szelőszakaszok tétele alapján

$$ST = \frac{a}{3}$$

$$CT = \frac{b}{3}$$

A beírt kör sugara

$$r = \frac{a+b-\sqrt{3}}{2}$$

Ekkor

$$PS = \frac{b}{3} - \frac{a+b-\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{a}{2} - \frac{b}{6}$$

$$KP = \frac{a+b-\sqrt{3}}{2} - \frac{a}{3} = \frac{a}{6} + \frac{b}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

KPS háromszögre felírjuk a Pitagorasz tételt:

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{a}{2} - \frac{b}{6}\right)^2 + \left(\frac{a}{6} + \frac{b}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \left(\frac{a+b-\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

Négyzetre emelve és rendezve az alábbi egyenletet kapjuk:

$$-\frac{a^2}{3} - \frac{b^2}{3} + 2ab + 2\sqrt{3}a + 2\sqrt{3}b - 9 = 0$$

Az egyenlet bal oldala nem változik, ha hozzáadunk és le is vonunk hármat, felhasználva, hogy Pitagorosz tétele alapján $a^2 + b^2 = 3$:

$$a^2 + b^2 - 3 - \frac{a^2+b^2}{3} + 2ab + 2\sqrt{3}a + 2\sqrt{3}b - 9 = 0$$

Ebből az egyenletből az alábbi, $a + b$-re másodfokú egyenletet kapjuk:

$$(a+b)^2 + 2\sqrt{3}(a+b) - 13 = 0$$

Ennek megoldásai:

$$a + b = -\sqrt{3} + 4 \ \text{ és } \ a + b = -\sqrt{3} - 4$$

A második nyilván nem megoldás, tehát a háromszög kerülete:

$$a + b + \sqrt{3} = 4$$

10. Legyen H azon rendezett $(p\,;\ q\,;\ r)$ számhármasok halmaza, hogy p, q, r mind pozitív prímek, valamint a $px^2 + qx + r = 0$ egyenlet gyökei racionális számok.
Mely prímek jelennek meg legalább 7 különböző H-beli számhármasban?

Megoldás:

Egy másodfokú egyenlet megoldásai akkor racionális számok, ha az egyenlet diszkriminánsa egy racionális szám négyzete, esetünkben négyzetszám, tehát $q^2 - 4pr = n^2$.
Ebből $(q-n)(q+n) = 4pr$, *q és n azonos paritású.*
Ha q és n is páros, akkor $q = 2$, *de ekkor* $4 - 4pr < 0$, *ez lehetetlen*
Ha q és n is páratlan, akkor két páratlan szám 4-gyel osztva 1 vagy 3 maradékot ad, így $q - n$ *és* $q + n$ *tényezők közül az egyik osztható 4-gyel a másik pedig 2-vel, így a bal oldal osztható 8-cal.*
Ebben az esetben p vagy r osztható 2-vel, tehát $p = 2$ *vagy* $r = 2$.
A szimmetria miatt legyen $p = 2$, *így a megoldások felét kapjuk meg.*
Ekkor

$$(q-n)(q+n) = 8r$$

Mivel r prím és $q - n < q + n$ *ezért*

$$q - n = 2 \text{ és } q + n = 4r$$

amiből $q = 2r + 1$
vagy

$$q - n = 4 \text{ és } q + n = 2r$$

amiből $q = r + 2$
Így a lehetséges jó számhármasok:
$(2\,;2r+1\,;r)$ *és* $(2\,;r+2\,;r)$ *ha* $p = 2$ *vagy* $(p\,;p+2\,;2)$ *és* $(p\,;2p+1\,;2)$ *ha* $r = 2$.
A feladatnak nyilván megoldása a 2, hiszen ha r és r + 2 ikerprímek (amiből van legalább hét) az jó.
Egy másik prím legfeljebb nyolc különböző számhármasban lehet (pirossal jelölve a kérdéses prím):
$(2\,;\mathbf{2r+1}\,;r)$, $(2\,;2r+1\,;\mathbf{r})$, $(2\,;\mathbf{r+2}\,;r)$, $(2\,;r+2\,;\mathbf{r})$,
$(p\,;\mathbf{2p+1}\,;2)$, $(\mathbf{p}\,;2p+1\,;2)$, $(p\,;\mathbf{p+2}\,;2)$, $(\mathbf{p}\,;p+2\,;2)$
Mivel a 3. és 7., vagy 4. és a 8. esetközül csak az egyik maradhat ki (7 különböző számhármas kell), ezért a kérdéses prímnél 2-vel nagyobb és 2-vel kisebb szám is prím. A prímszámok hármas maradékát vizsgálva, ez csak az 5 lehet.
$(2\,;5\,;2)$, $(2\,;11\,;5)$, $(2\,;5\,;3)$, $(2\,;7\,;5)$, $(5\,;11\,;2)$, $(3\,;5\,;2)$, $(5\,;7\,;2)$

11. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert! (a, b, c pozitív számok!)

$$I.\quad \frac{1}{ab+a+1} + \frac{1}{bc+b+1} + \frac{1}{ca+c+1} = 1$$

$II.\ a + b + c = 3$

Megoldás:

Bővítsük az első egyenlet bal oldalának második és harmadik törtjét a-val, illetve ab-vel

$$\frac{1}{ab+a+1} + \frac{a}{abc+ab+a} + \frac{ab}{abca+abc+ab} = 1$$

1. *Ha* $abc > 1$, *akkor*

$$1 = \frac{1}{ab+a+1} + \frac{a}{abc+ab+a} + \frac{ab}{abca+abc+ab} < \frac{1}{ab+a+1} + \frac{a}{1+ab+a} + \frac{ab}{a+1+ab} = 1$$

   Ez nyilvánvalóan ellentmondás

2. *Ha* $abc < 1$, *akkor*

$$1 = \frac{1}{ab+a+1} + \frac{a}{abc+ab+a} + \frac{ab}{abca+abc+ab} > \frac{1}{ab+a+1} + \frac{a}{1+ab+a} + \frac{ab}{a+1+ab} = 1$$

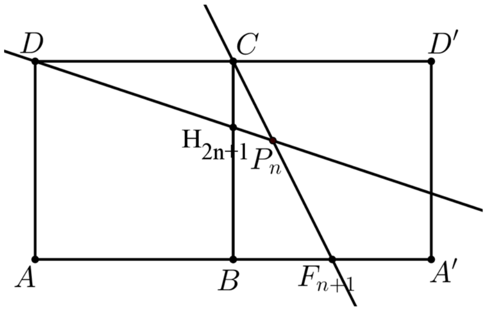
   Ez is nyilvánvalóan ellentmondás

Tehát $abc = 1$ *(Ebben az esetben az első egyenlet teljesül.)*
Alkalmazzuk a számtani-mértani közép közötti egyenlőtlenséget:

$$1 = \sqrt[3]{abc} \le \frac{a+b+c}{3} = 1$$

Tehát $a = b = c = 1$

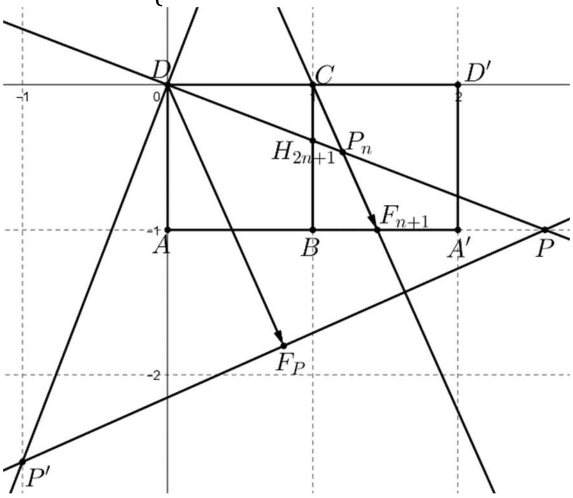
12. Adott az $ABCD$ négyzet. Ennek BC oldalára tükrözve A-t, és B-t adódik az $A'D'CB$ négyzet. Tekintsük a BC oldal C-hez legközelebbi $2n$+1-edelő pontját (n pozitív egész!), ezt jelöljük H_{2n+1}-gyel, valamint a BA' oldal A'-höz legközelebbi n+1-edelőpontját, ezt pedig jelöljük F_{n+1}-gyel. A D-n, és H_{2n+1}-en átmenő egyenes metszéspontja a C-n, és F_{n+1}-en átmenő egyenessel legyen P_n. Bizonyítsuk be, hogy a P_n pontok mind egy körön helyezkednek el!



Megoldás:

Bebizonyítjuk, hogy $DP_nC\sphericalangle = 45°$

1. módszer (koordináta-rendszerben vektorokkal)



Legyen a négyzet oldala egységnyi és helyezzük el derékszögű koordináta-rendszerben $A(0;-1), B(-1;-1), C(1;0), D(0;0)$.

Legyen $P = DH_{2n+1} \cap AB$

$\overrightarrow{DH_{2n+1}}\left(1;-\frac{1}{2n+1}\right)$ *és* $\overrightarrow{DP} = (2n+1)\overrightarrow{DH_{2n+1}}$, *így* $P(2n+1;-1)$.

Forgassuk el a $\overrightarrow{DP}$ vektort D körül $90°$-kal negatív irányba.

Ekkor $\overrightarrow{DP'}(-1;-2n-1)$, így $P'(-1;-2n-1)$.

Legyen F_P a PP' szakasz felezőpontja, így $F_P(n;-n-1)$.

$\overrightarrow{DF}(n;-n-1)$ *és* $\left(\overrightarrow{DF}\,;\,\overrightarrow{DP}\right)\sphericalangle = 45°$, *hiszen DPP' egyenlő szárú derékszögű háromszög.*

$F_n\left(2-\frac{1}{n+1};-1\right)$, *így* $\overrightarrow{CF_n}\left(\frac{n}{n+1};-1\right)$

Mivel $\overrightarrow{DF_P} = (n+1)\cdot\overrightarrow{CF_{n+1}}$, *így a két vektor párhuzamos, tehát a CF_n egyenes $45°$-os szöget zár be DP egyenessel.*

2. módszer (Addíciós képlettel)

Legyen $P_nDC\sphericalangle = \alpha$ és $BCP_n\sphericalangle = \beta$. Ha belátjuk, hogy $\alpha+\beta = 45°$, akkor készen vagyunk.

$DH_{2n+1}C$ derékszögű háromszögből

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2n+1}$$

BCF_{n+1} derékszögű háromszögből:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{1-\frac{1}{n+1}}{1} = \frac{n}{n+1}$$

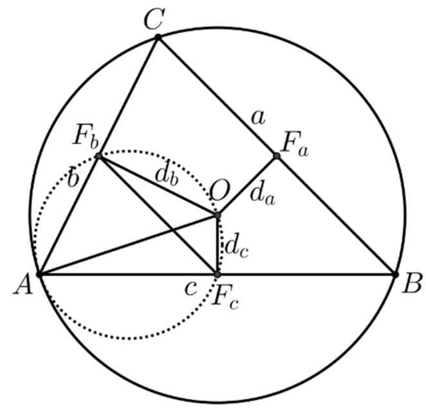
$$tg(\alpha+\beta) = \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha\cdot tg\beta} = \frac{\frac{1}{2n+1}+\frac{n}{n+1}}{1-\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{n}{n+1}} = \frac{n+1+n(2n+1)}{(n+1)\cdot(2n+1)-n} = \frac{2n^2+2n+1}{2n^2+2n+1} = 1$$

Tehát $\alpha+\beta = 45°$

13. Legyen R a háromszög köré, r a háromszögbe írt kör sugara, d_a, d_b, d_c a köré írt kör középpontjának az oldalaktól mért távolsága. Bizonyítsuk be, hogy ha a háromszög hegyesszögű, akkor

$$d_a + d_b + d_c = R + r$$

1. Megoldás:



AF_cOF_b *húrnégyszög tehát Ptolemaiosz tétele alapján:*

$$AO \cdot F_bF_c = AF_b \cdot OF_c + AF_c \cdot OF_b$$

Azaz:

$$R \cdot \frac{a}{2} = d_c \cdot \frac{b}{2} + d_b \cdot \frac{c}{2}$$
$$R \cdot a = b \cdot d_c + c \cdot d_b$$

Ugyanígy

$$R \cdot b = a \cdot d_c + c \cdot d_a$$
$$R \cdot c = b \cdot d_a + a \cdot d_b$$

Összeadva:

$$(a + b + c) \cdot R = (b + c) \cdot d_a + (a + c) \cdot d_b + (a + b) \cdot d_c$$
$$(a + b + c) \cdot R + a \cdot d_a + b \cdot d_b + c \cdot d_c = (a + b + c) \cdot (d_a + d_b + d_c)$$

Mivel

$$a \cdot d_a + b \cdot d_b + c \cdot d_c = 2T = (a + b + c) \cdot r$$

Az egyenlet:

$$(a + b + c) \cdot R + (a + b + c) \cdot r = (a + b + c) \cdot (d_a + d_b + d_c)$$
$$R + r = d_a + d_b + d_c$$

14. Oldjuk meg az $[x^2] = 20x + 13$ egyenletet a valós számok halmazán!

<u>Megoldás:</u>

Baloldal nemnegatív egész, így $x = \frac{n-13}{20}$, *ahol n természetes szám, tehát* $x \geq \frac{-13}{20}$, *ez megoldás is.*

Ha x megoldás, akkor $20 - x$ *is megoldás, mert*

$[(20 - x^2)] = [400 - 40x + x^2] = 400 - 40x + [x^2] = 400 - 40x + 20x + 13 = 20(20 - x) + 13$

Így a -0,65 *mellett a* 20,65 *is megoldás*

Vagyis elég -0,65*-től* 10*-ig megkeresni a megoldásokat.*

$$\frac{-12}{20}\ ;\ \frac{-11}{20}\ ; \ldots ;\ \frac{7}{20}$$

nyilván nem megoldás, mert a bal oldal nulla, a jobb oldal pozitív.

Ettől kezdve a lehetséges x-ek, már előállnak, mint egy korábbi x, plusz 1.

$[(x + 1)^2] = [x^2 + 2x + 1] < [x^2] + 20$, *mindaddig, amíg* $x < 9{,}5$.

De ekkor $[x^2] + 20 = 20x + 13 + 20 = 20(x + 1) + 13 < 20(x + 1) + 13$, *itt nincs megoldás*

$9{,}5 \leq x \leq 10$, *véges sok lehetőség, nem ad megoldást.*

Tehát két megoldás van.

15. Bizonyítsa be, hogy az $ax^2 + bx + c = 0$ másodfokú egyenlet $(a, b \neq 0)$ gyökei kielégítik az alábbi egyenlőtlenséget:

$$|x| \leq \frac{2|ac| + b^2}{|ab|}$$

Megoldás:

Az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy például $|x_1| \leq |x_2|$, így elegendő az

$$|x_2| \leq \frac{2|ac| + b^2}{|ab|}$$

egyenlőtlenséget igazolni.

A gyökök és együtthatók összefüggései alapján $b = -a(x_1 + x_2)$ és $c = a \cdot x_1 \cdot x_2$, ekkor

$$\frac{2|ac| + b^2}{|ab|} = \frac{2|a^2 x_1 x_2| + a^2(x_1 + x_2)^2}{|-a^2(x_1 + x_2)|} = \frac{2|x_1 x_2|}{|x_1 + x_2|} + |x_1 + x_2|$$

1. eset: Ha x_1 és x_2 azonos előjelű, vagy $x_1 = 0$, akkor $|x_1 + x_2| = |x_1| + |x_2|$

$$\frac{2|x_1 x_2|}{|x_1 + x_2|} + |x_1 + x_2| = \frac{2|x_1 x_2|}{|x_1 + x_2|} + |x_1| + |x_2| \geq |x_2|$$

Megjegyzés: Ekkor $x_1 + x_2 \neq 0$ mert ez csak $x_1 = x_2 = 0$ esetben lehetne, de ez $b \neq 0$ miatt nem lehetséges.

2. eset: Ha x_1 és x_2 különböző előjelű, akkor $|x_1 + x_2| = |x_2| - |x_1|$, $($mivel $|x_2| \geq |x_1|)$ tehát

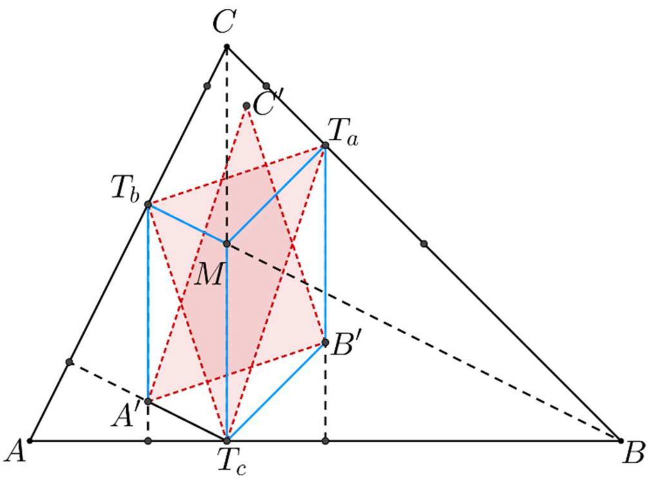
$$\frac{2|x_1 x_2|}{|x_1 + x_2|} + |x_1 + x_2| = \frac{2|x_1 x_2|}{|x_2| - |x_1|} + |x_2| - |x_1| = |x_2| + \frac{2|x_1 x_2| - |x_1||x_2| + |x_1|^2}{|x_2| - |x_1|} =$$

$$= |x_2| + \frac{|x_1||x_2| + |x_1|^2}{|x_2| - |x_1|} \geq |x_2|$$

Megjegyzés: $b \neq 0$ miatt $|x_2| - |x_1| \neq 0$

16. Az ABC háromszög csúcsokból induló magasságok talppontjai rendre T_a, T_b, T_c. Az AT_bT_c háromszög magasságpontja A', a BT_aT_c háromszög magasságpontja B' és a CT_aT_b háromszögé C'. Bizonyítsuk be, hogy $A'B'C'$ egybevágó $T_aT_bT_c$ háromszöggel!

<u>*Megoldás:*</u>



Legyen M a háromszög magasságpontja. $T_bA' \parallel MT_c \parallel T_aB'$ mert merőleges AB-re, illetve

$MT_b \parallel A'T_c$, mert merőleges AC-re és

$MT_a \parallel A'T_c$, mert merőleges BC-re.

Ekkor $A'T_cMT_b$ és $B'T_aMT_c$ négyszögek paralelogrammák.

De így $A'T_b = B'T_a$ és $A'T_b \parallel B'T_a$, tehát $A'B'T_aT_b$ négyszög is paralelogramma, ekkor viszont $A'B' = T_aT_b$.

Hasonlóan $A'C' = T_aT_c$ és $B'C' = T_bT_c$, tehát a két háromszög egybevágó, mert megfelelő oldalaik egyenlők.

17. Melyik az a háromjegyű szám, amely eleget tesz az alábbi feltételeknek:

(1) Ha az első két számjegyét elhagyjuk, az eredeti szám négyzetgyökét kapjuk.

(2) Ha az első két számjegyét átírjuk az utolsó kettő mögé, olyan számot kapunk, amely 1881-gyel nagyobb az eredeti számnál.

Megoldás:

Jelölje az első két számjegyből álló számot a, a második két számjegyből álló számot b

(1) $100a + b = b^2$

(2) $100b + a - 100a - b = 1881$

A második egyenletből (2) $b - a = 19$

Ezt az elsőbe beírva az (1) $a^2 - 63a + 342 = 0$ *másodfokú egyenletet kapjuk.*

Ennek megoldásai 6 és 57, ezek közül az 57 a jó megoldás.

18. Adjuk meg azokat a hatjegyű természetes számokat, amelyeknek az első három számjegyét elhagyva az eredeti szám négyzetgyökét kapjuk.

Megoldás:

A szám csak 0-ra, 1-re, 5-re vagy 6-ra végződhet, mert ezek azok a számjegyek, amelyek négyzete az eredeti számjegyre végződik.

1.eset: A szám 0-ra végződik.

Legyen az utolsó három számjegyből álló szám: $\overline{xy0}$. *A négyzetre emelés után:*

$(100x + 10y + 0)^2 = 10000x^2 + 100y^2 + 2000xy = 100(100x^2 + y^2 + 20xy)$

Mivel egy ilyen szám utolsó előtti számjegye 0, ezért $y = 0$, *de ekkor a négyzet* $10000x^2$, *amiből az következik, hogy a hátulról számított második számjegy is nulla, és ez nem lehetséges.*

2. eset: A szám 1-re végződik.

Az előbbieknek megfelelően

$(100x + 10y + 1)^2 = 10000x^2 + 100y^2 + 1 + 2000xy + 200x + 20y =$

$= 100(100x^2 + y^2 + 20xy + 2x) + 20y + 1$

Mint látható, az utolsó előtti számjegyet a $20y$*-os tag adja meg. Ebből az következik, hogy* $2y$ *és* y *tízzel osztva ugyanazt a maradékot adja, amiből* $y = 0$, *így az előző eset alapján ez nem lehetséges.*

3. eset: A szám 5-re végződik.

Az előbbiekhez hasonlóan:

$(100x + 10y + 5)^2 = 10000x^2 + 100y^2 + 25 + 2000xy + 1000x + 100y =$

$= 100(100x^2 + y^2 + 20xy + 10x + y) + 25$

Ebből kövezetik, hogy $y = 2$, *így*

$(100x + 25)^2 = 10000x^2 + 1000x + 625 = 1000(10x^2 + x) + 625$, *amiből* $x = 6$.

Ellenőrizve: $625^2 = 390625$

4. eset: A szám 6-ra végződik.

Ekkor:

$(100x + 10y + 6)^2 = 10000x^2 + 100y^2 + 36 + 2000xy + 1200x + 120y =$

$= 100(100x^2 + y^2 + 20xy + 12x) + 120y + 36$

Ebből az következik, hogy $2y + 3$ *tízes maradéka* y, *azaz*

$10|(2y + 3 - y) \iff 10|(y + 3)$, *amiből* $y = 7$.

Így:

$(100x + 76)^2 = 10000x^2 + 15200x + 5776$

Ebből az következik, hogy a $2x + 7$ *tízes maradéka x, tehát*

$10|(2x + 7 - x) \iff 10|(x + 7)$ *amiből* $x = 3$

Ellenőrizve: $376^2 = 141376$

19. Tetszőleges n pozitív egész számra jelölje $f(n)$ az olyan $2n$ jegyű számok számát, melyek megegyeznek az utolsó n számjegyükből alkotott szám négyzetével. Határozzuk meg az f függvény értékkészletét.

Megoldás: Megtalálható a társulat honlapján...